La geometria nei materiali e nelle immagini per apprendere il sistema di numerazione posizionale decimale. Dalla storia alla scuola di oggi

Ana Millán Gasca - Emanuela Spagnoletti Zeuli[1]

In ricordo di Giorgio Israel (1945-2015)[2]

Vi sono delle notevoli similitudini fra i materiali sviluppati da Maria Montessori (1870-1952) nei primi decenni del Novecento per rappresentare concretamente un numero e coadiuvare l'apprendimento del sistema di notazione simbolica decimale posizionale oggi corrente – materiali tuttora adoperati in modo normalizzato nelle scuole montessoriane di tutto il mondo – e alcuni materiali didattici "concreti" sviluppati e commercializzati nel dopoguerra allo stesso scopo (i regoli o numeri in colore del maestro belga Georges Cuisenaire [1891-1976], ben noti, e i blocchi multibase dello studioso di origine ungherese Zoltan P. Dienes [1916-2014], che pure hanno avuto fortuna per un certo periodo in Italia, paese che visitò più volte); così come i materiali e

1 anamaria.millangasca@uniroma3.it; emanuela.spagnoletti@uniroma3.it. Si rinvia al sito *Matematica per la formazione primaria* (Roma Tre): http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/index.html.

2 Questo articolo è debitore delle chiavi che René Thom offrì a tutti coloro che insegnano matematica nei momenti critici della febbre "insiemistica" (si veda la bibliografia finale). Giorgio Israel apprezzava e sottolineava il contributo di Thom all'epistemologia della scienza: si veda l'intervista in versione completa bilingue, Giorgio Israel 2013 *Un entretien avec René Thom – Un'intervista a René Thom*, e-book, Amazon-Kindle, 2013; una versione ridotta è: "Il demiurgo intelligente, intervista a René Thom, a cura e con schede di Giorgio Israel", *Prometeo. Rivista di Scienze e Storia*, Anno 8, n° 29, Marzo 1990, pp. 28-37.

le “analogie visive” proposte oggi da sussidiari per la scuola primaria in tutte le lingue; e vari “sistemi didattici” per la numerazione e il calcolo che sono accompagnati spesso da un valore quasi “salvifico” nei confronti dell’apprendimento infantile. In questo articolo consideriamo come esempio i sussidiari di Karen Fuson (Stati Uniti) e di Luis Ferrero e altri (Spagna), e il “metodo” di Camillo Bortolato (Italia).

Se questa tecnica didattica e questo insieme di modelli concreti ad uso didattico sono stati proposti da più parti (negli anni e in aree culturali diverse), è naturalmente perché ritenuti efficaci, funzionali alla comprensione del concetto di numero (operazioni, ordine) e, soprattutto, del principio posizionale del sistema di numerazione di origine indiana oggi in uso e dei numeri 10 e quadrato e cubo di 10, ossia le prime potenze della base 10, che sono implicite nell’applicazione del principio.

Tuttavia, già nei primi anni Ottanta del Novecento, Martin Hughes (1949-2011), in un capitolo del suo fondamentale saggio *Children and numbers. Difficulties in learning mathematics* (1986), presentava una serie di osservazioni in aula condotte in Gran Bretagna che rendevano evidente il fatto che la manipolazione e l’uso agevole dei blocchi multibase non costituivano necessariamente un valido aiuto nell’eseguire operazioni in colonna. Attraverso una serie di accurati esempi individuali scelti per il loro valore emblematico, egli mostrava “errori” dei bambini dovuti alla separazione, quasi una spaccatura fra il principio posizionale del sistema di notazione dei numeri sul foglio attraverso simboli e il principio additivo che presiede alla rappresentazione di un numero attraverso molti modelli fisici.

1. Un primo paradosso: la rappresentazione additiva dei numeri per comprendere il principio di rappresentazione posizionale

Le osservazioni di Hughes non avevano lo scopo di “condannare” e nemmeno criticare l’uso di uno o l’altro materiale. Infatti, i consigli che egli proponeva alla fine della sua indagine erano idee-guida per chi insegna e o per chi studia l’apprendimento dei bambini, e non ricette didattiche di successo garantito. Nonostante il suo fosse il punto di vista di uno psicologo dell’età evolutiva, nel suo libro dedicò un intero capitolo ai sistemi di numerazione attraverso la storia e le culture del mondo, mostrando così di sentire l’esigenza di restituire alla cultura la matematica e i suoi oggetti di studio per comprendere le sfide insite nell’apprenderla e nell’insegnarla.

Difatti, è paradossale osservare che molti dei materiali concreti e dei sussidi visivi rappresentano i numeri secondo un principio additivo nell’uso dei simboli (il principio usato dagli antichi Sumeri o dagli Egizi) e non sul principio posizionale su cui si fonda il nostro sistema decimale attuale, anche se il loro scopo è proprio agevolare la comprensione del sistema posizionale.

La comprensione di un sistema di rappresentazione additivo risulta molto più semplice, intuitiva e immediata per gli alunni. Bambini della scuola dell'infanzia, anche molto piccoli, sono infatti in grado di capire che se si rappresenta l'unità sotto forma, ad esempio, di *una* stanghetta (come *un* dito), il *tre* sarà formato da 3 stanghette e così via aggiungendo stanghette secondo la logica del contare[3]. Se arrivati alla quantità *cinque* (come tutte le dita della mano) proponiamo loro di disegnare un fiorellino (magari con 5 petali), per loro sarà naturale e assolutamente accettabile che il numero *sei* sia rappresentato da un fiorellino e una stanghetta, il *sette* da un fiorellino e due stanghette e così via, per ripetizione o ricorrenza,[4] fino al *nove*. Il passaggio ai due fiorellini per rappresentare il *dieci* potrebbe avvenire come richiesta spontanea da parte dei bambini prima di quanto non ci si aspetti e in questo caso, come insegnanti, assisteremo alla "gioia della scoperta" di cui parla George Polya[5]. Così – con poco esercizio – i fanciulli interpretano agevolmente ciò che i segni o materiali rappresentano, in quanto il simbolo si collega più strettamente alla quantità rappresentata (che non attraverso la cifra o le cifre che lo rappresenta o rappresentano!).

Le perle di Montessori, i blocchi di Dienes e i disegni o i materiali in cartoncino plastificato ritagliabile non costituiscono però un sistema di simboli alternativo, bensì essi "rivelano" le decine, le centinaia e le migliaia che sono nascoste quando si scrive il numero usando le cifre arabe di origine indiana, in un crinale che rinvia al principio posizionale mantenendo ancora la mente (e il corpo: vista, tatto) dei bambini legata alla presenza della quantità come un *totale*, come era visto nelle registrazioni numeriche delle tavolette sumere o nelle

---

[3] Assiomi di Peano: 1) Uno è un numero (è un elemento di N). 2) Il successivo di un numero è un numero. 3) Uno non è successivo di alcun numero. 4) Se i successivi di due numeri sono uguali, anche i due numeri sono uguali. 5) Se un sottoinsieme A di N contiene il numero uno e il successivo di ogni suo elemento allora A = N.

[4] Il principio di induzione sostituisce l'idea di ripetizione o iterazione ("e così via") con una definizione rigorosa e compatta (Israel, Millán Gasca 2012, p. 75).

[5] "Do not give away your whole secret at once - let the students guess before you tell it-let them find out by themselves as much as is feasible." (Non rivelare immediatamente tutto quello che sai e devi spiegare agli studenti - fallo congetturare dagli studenti prima di dirlo - fai loro scoprire, da soli, quanto più è possibile: si tratta di uno dei 10 comandamenti di Polya per gli insegnanti: Polya 1971, vol II).

iscrizioni geroglifiche egizie[6]. Ci soffermiamo nel prossimo paragrafo sul modo in cui avviene questo rendere palese agli occhi dei bambini ciò che è nascosto.

Si osservi che invece l'abaco è una rappresentazione con un materiale che si tocca, si vede e si muove che risponde al principio posizionale: esso infatti è stato usato nel passato per applicare un principio posizionale nei calcoli, anche laddove non era usata una registrazione posizionale dei numeri.

2. L'intuizione geometrica infantile nei materiali didattici per l'aritmetica

Non si tratta, lo ribadiamo, di puntare il dito contro un materiale: rilevare un paradosso ci aiuta a comprendere meglio la *ratio* di un materiale, come esso sfrutta o si colloca all'interno della rete di nessi concettuali della matematica elementare (usando l'espressione di Laurent Lafforgue). Vogliamo qui rilevare un secondo paradosso, collegato al primo, e cioè il fatto che per comprendere la rappresentazione simbolica posizionale dei numeri naturali oppure, più in generale (è il caso dei regoli), le proprietà dei numeri naturali (struttura algebrica, struttura d'ordine, divisione con resto: il "calcolo"), ossia per aprire la strada ai bambini nel campo dell'*aritmetica*, essi sfruttano l'intuizione *geometrica* dei più piccoli.

Materiali didattici per l'aritmetica 3D

Nella fig. 1 mettiamo a confronto i dieci regoli o numeri in colore di Cuisenaire con le perle colorate di Montessori per rappresentare i numeri da 1 a 10, ossia proprio i nove numeri naturali che hanno una cifra che li rappresenta nel sistema di numerazione indiano nonché il primo numero che richiede due cifre. Si osservi, incidentalmente, che la taglia scelta per i materiali, adatta alle mani dei bambini, è simile (ma nei regoli è usato il centimetro, e quindi il regolo arancione permette di visualizzare un decimetro quadrato, con un intenso riferimento a unità di lunghezza del sistema metrico decimale familiare ai bambini in Belgio o in Italia, si veda la fig. 4).

---

[6] Rinviamo a Israel, Millán Gasca 2012, cap. 1 e 2 e alla bibliografia ivi presentata sulle ricerche recenti sui sistemi di numerazione antichi. Si possono consultare utilmente anche i volumi della *Storia della scienza* dell'Istituto della Enciclopedia Italiana Treccani. Alla base del principio posizionale, si ricordi, vi è il teorema di rappresentazione dei numeri interi (si veda Israel, Millán Gasca 2012, cap. 2, pp. 48-50 e cap. 4, pp. 106-107). Per le origini del sistema di numerazione indiano e la sua trasmissione ai paesi dell'Islam e nell'Europa medievale si rinvia a Israel, Millán Gasca 2012 pp. 46-48 e alla bibliografia ivi citata.

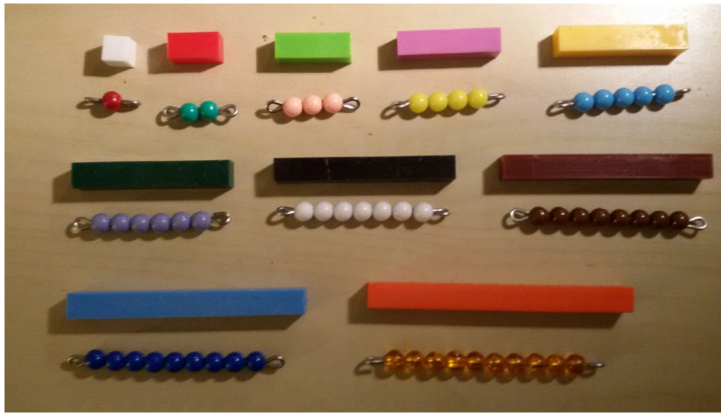


Fig. 1 I regoli o numeri in colore da 1 (cubo bianco e perla rossa in una stanghetta) a 9 (regolo blu e nove perle in una stanghetta blu). Il primo numero che richiede due cifre, 10, ha un regolo dedicato (regolo arancione) e una stecca con 10 perline arancioni. (Foto di E. Spagnoletti Zeuli)

Si osservi che la disposizione delle perle allineate infilandole in una stanghetta rigida rinvia all'idea di distanza o segmento; nel caso dei regoli il numero è collegato alla lunghezza maggiore degli spigoli dei parallelepipedi con due dei lati opposti di area quadrata sempre uguale, formati dalla ripetizione del regolo bianco, il cubo.[7]

> Ognuno di essi fa pensare che in particolare questo piccolo cubo di in un centimetro cubo è per forza l'unità. Destino di questo cubo è di essere definitivamente unità. Non importa quale di questi regoli possa valerla. Così per caso prendo questo (il regolo rosa che corrisponde al numero 4) che vale un intero, poi ne prendo altri: questo varrà tre quarti (indicando il regolo verde chiaro che corrisponde al numero 3); questo varrà la metà (indicando il regolo rosso che corrisponde al numero 2); mentre il marrone (che corrisponde al numero 8) varrà due interi. Questa caratteristica di relazione tra i regoli permette il successo al metodo dei numeri in colore.

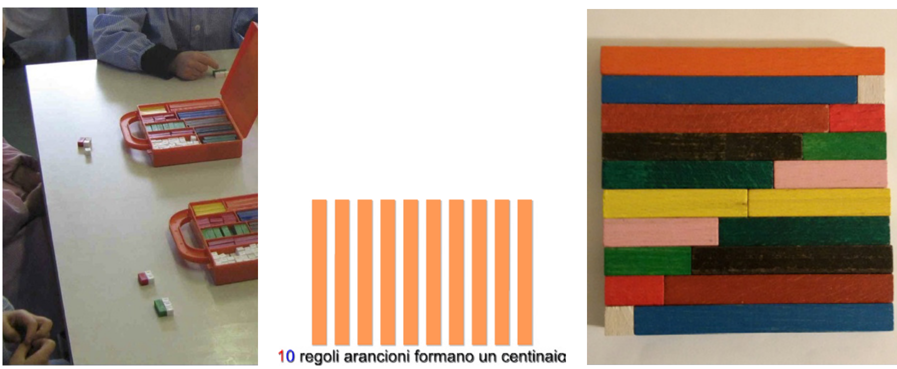
Nel caso delle perle, il riferimento alla distanza si combina con quello al contare (le singole perle), che nel caso dei regoli può essere fatto soltanto confrontando i regoli con alcuni cubetti disposti uno accanto all'altro (fig. 2a).

Lo sviluppo dei regoli avviene sfruttando l'analogia fra l'uguaglianza o congruenza geometrica (dei volumi, dei segmenti) e quella aritmetica (decomposizioni di numeri), il confronto maggiore uguale o multiplo geometrico

---

7 Citiamo le parole di Cuisenaire, dal documentario *L'as des reglettes* (si veda bibliografia).

e aritmetico, la somma geometrica e la somma aritmetica. I regoli infatti non servono alla introduzione del principio posizionale. Il regolo 10 non svolge nessun ruolo particolare diverso da quello degli altri regoli, e la base decimale del nostro sistema di numerazione è sullo sfondo, ad esempio rappresentando con l'aiuto del regolo arancione i numeri a due cifre; oppure rappresentando il centinaio con dieci regoli arancioni (fig. 2).



a) b) c)

Fig. 2 I regoli di Cuisenaire. a) a sinistra "contare con i regoli" (foto di E. Bianchini e I. Scalora, 5 anni); c) a destra uno dei "muretti" che si usano sistematicamente in molte aule di classe prima in Italia, mentre spesso non sono sfruttati le potenzialità dei regoli per rappresentare divisioni con resto, giocare alle sottrazioni e così via (si veda la guida, essenziale, nel sito cuisenaire.eu). b) Al centro i dieci regoli arancioni (si confronti con fig. 3).

a) b)

Fig. 3 Il centinaio nel materiale Montessori: a) a sinistra, nel "quadrato" di perle; b) a destra, la tavoletta di puntini grossi o perline stilizzate (dalla piccola sfera al piccolo cerchio, sezione della sfera). La tavoletta ha due facce quadrate, e tuttavia ha uno spessore che la riallaccia ancora alla sensazione tattile della forma fatta da perle.

Lo sviluppo delle perle (fig. 3) avviene invece con la composizione di quadrati e di cubi di spigolo 10: la stanghetta con dieci perle diventa quindi rispettivamente il lato e lo spigolo di altri due oggetti. Si apre così la strada alla riflessione sulla scrittura posizionale decimale dei numeri.

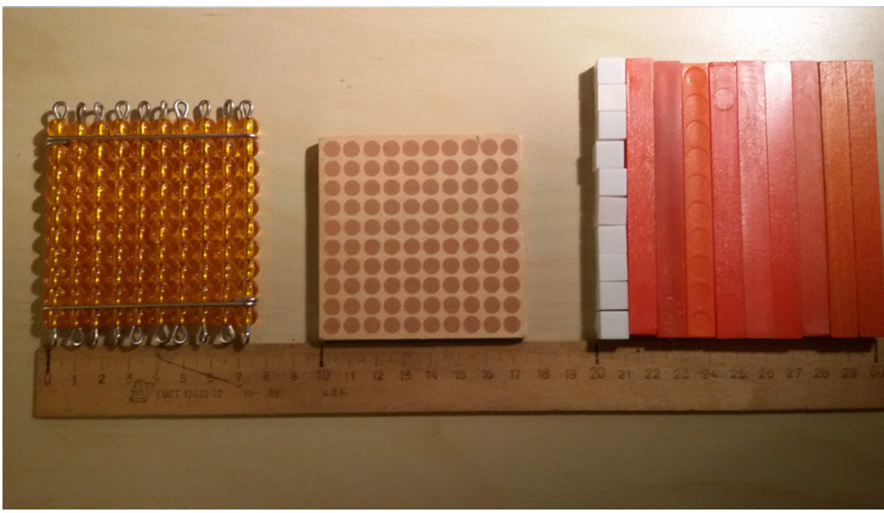


Fig. 4 Il centinaio a confronto: a sinistra le 100 perle Montessori; nel centro la tavoletta di legno con le 100 palline rappresentate; a destra il 100 rappresentato con i regoli (9 decine arancioni e 10 unità bianche). Si osservi che i regoli sono ideati in modo che il valore 100 corrisponda effettivamente al decimetro quadrato (l'unità è un centimetro cubo) (Foto di E. Spagnoletti Zeuli).

Questo tipo di rappresentazione si appoggia sull'intuizione geometrica ingenua, perché presuppone che il bambino apprenda facilmente e intuitivamente che, ad esempio, il regolo arancione possa essere usato al posto di 10 cubetti bianchi o di due parallelepipedi rossi, e analogamente che le 100 perle Montessori (disposte ordinatamente in 10 file e 10 colonne) possano essere agevolmente sostituite da una tavoletta di legno con sopra rappresentate 100 palline ordinate in uno schieramento 10 x 10. Altrettanto evidente è che l'uso agevole dei blocchi di Dienes (fig. 4) sfrutta l'intuizione del continuo: il centimetro cubo permette di visualizzare la seconda e terza potenza di basi diverse da 10 (quindi 4 e 8, 9 e 27, 16 e 64, 25 e 125 e così via).

Fig. 5 B.A.M, Blocchi Aritmetici Multibase, ideati da Dienes

La loro geometria è la chiave di volta che permette a questi materiali di essere didatticamente così potenti ed efficaci; di essere significativi e comunicativi al di là di ogni spiegazione verbale. Sono infatti materiali che "parlano da soli" nelle mani dei bambini proprio perché richiamano in loro l'intuizione geometrica ingenua[8] che li spinge a mettere insieme questi "pezzetti" (palline, cubi grandi e piccoli, tavolette e regoli), di legno, plastica, cartoncino, vetro, ecc., per operare confronti e stabilire relazioni d'ordine e di misura. I bambini spontaneamente accostano questi "pezzetti" uno accanto all'altro per formare delle scale, dei trenini, dei tappeti, delle collane, dei disegni (e persino dei palazzi o dei campi da calcio in 3D!). È la stessa intuizione geometrica, la stessa "logica dei solidi" (usiamo l'espressione di Bergson), che guida i bambini nel loro industriarsi tra mattoncini e stecche Lego di Ole Kirk Kristiansen, Kapla di Tom van der Bruggen e altri.

Questi materiali per l'aritmetica ricordano al bambino cosa c'è "dentro" un numero, e non lo fanno evocando "molti puntini o stanghette", bensì attraverso

---

8 Le concezioni matematiche ingenue sono discusse in un libro di prossima pubblicazione: A. Millán Gasca, *Numeri e forme. I bambini e la matematica* (Zanichelli), cap. 4. Il fondamento dell'intuizione geometrica ingenua è l'idea del continuo: "Come ha osservato il matematico René Thom, il continuo è l'entità fondamentale attraverso cui si stabilisce il rapporto tra il mondo fisico e il mondo psichico e che plasma le forme geometriche che "vediamo" negli oggetti e che da essi formiamo per astrazione" (Israel, Millán Gasca 2012, p. 156). Scrive Thom (1971, p. 698): "Non vi è dubbio che [...] il continuo geometrico è l'entità primordiale. Se si ha coscienza, questa è in primo luogo coscienza del tempo e dello spazio; la continuità geometrica è in certo senso legata inseparabilmente al pensiero cosciente".

la potenza simbolica della geometria. Poter toccare e vedere ad esempio la differenza tra 7, 17, 107 e 1.070 non è un'esperienza da poco se la si compie nei primi anni della scuola primaria, perché questo significa che negli anni seguenti si consoliderà sempre più diventando così un apprendimento stabile e *indiscutibile*. Spesso si sottovaluta l'importanza di questo tipo di esperienza e acquisizione – dandola magari per scontata – scoprendo troppo tardi (magari già alla scuola secondaria) che la comprensione di ciò che rappresenta un gruppo di cifre, nonostante gli anni trascorsi a scuola, non è ancora avvenuta effettivamente: il gruppo di cifre non è pregno di significato, non vi è un concetto di numero o, per dirla con Thom, il numero non ha esistenza nell'universo mentale dell'alunno[9].

Si noti che non si tratta soltanto dell'aggancio tra il numero e la realtà, per cui i numeri significano distanze, prezzi o pesi "veri" (esercizi questi anche interessanti). L'esercizio che consiste nell'"esperire" un numero grazie a una rappresentazione diversa da quella attraverso le cifre, ma comunque *rappresentazione* (non quindi direttamente quantità di cose, denaro o altro), è un passaggio importante che consente al bambino di stabilire con quel numero un "rapporto di intimità" di cui ha scritto Thom (1971) riferendosi al rapporto con i numeri nel calcolo mentale.

Con i materiali Montessori diventa interessante lavorare con i bambini per rappresentare in modo quantitativo e geometrico numeri anche piuttosto elevati, composti da diverse migliaia. Infatti, il lavoro di scomposizione del numero che spesso viene svolto sul quaderno, magari con l'ausilio di una tabella, può avvenire anche con i materiali concreti con lo stesso livello di efficacia (apprendimento) ma con qualche entusiasmo in più da parte degli alunni che sentono realmente di "costruire il numero" o di "indovinare il valore" della costruzione effettuata.

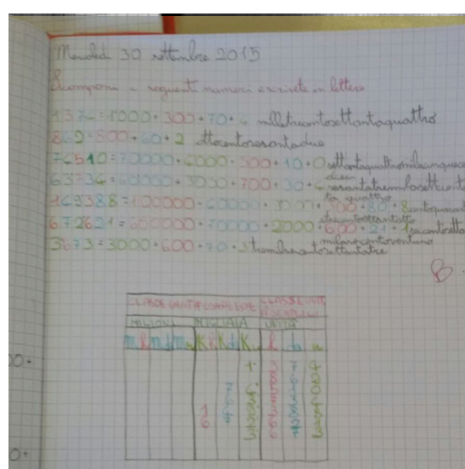
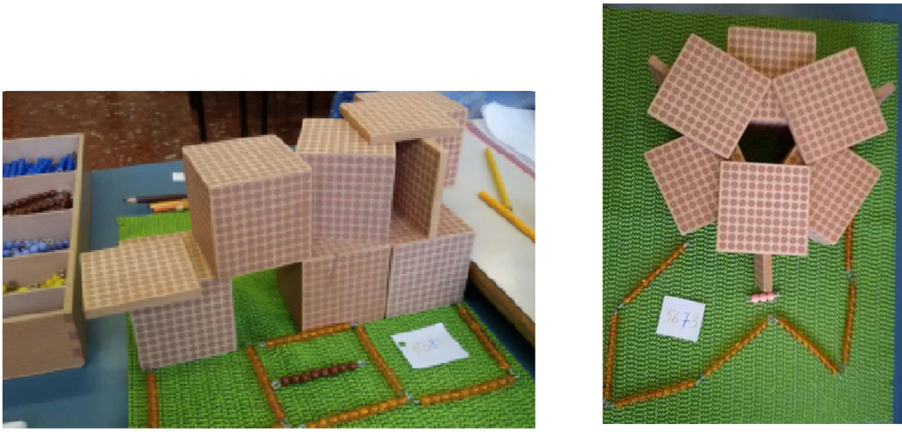


Fig. 6 Scomposizione del numero sul quaderno in una classe terza di una scuola primaria.

9 "Il vero problema che deve affrontare l'insegnamento della matematica non è il problema del rigore ma il problema della costruzione del significato, della giustificazione ontologica degli oggetti matematici" (Thom 1974).



a) b)

Fig. 7 Esempi di costruzione del numero con il materiale Montessori: a) a sinistra 8.388 e b) a destra 3.673.

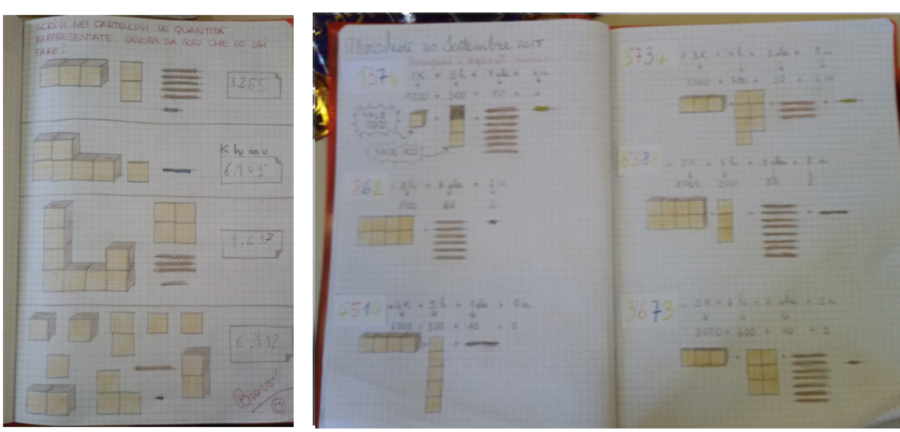


Fig. 8 Un quaderno in una classe III di una scuola primaria che illustra il lavoro svolto prima con i materiali Montessori (perle, tavolette del 100 e cubi del 1.000) e successivamente con la loro rappresentazione sul quaderno, per verificare se il sistema di rappresentazione del numero sia stato ben compreso e scivolare verso una rappresentazione 2D. (Immagine di E. Spagnoletti Zeuli)

Vi è quindi molta geometria nascosta nel lavoro sulla rappresentazione dei numeri che viene condotto nelle prime classi della scuola primaria; e il lavoro di progettazione e sviluppo di questo materiale poggia su una consapevolezza dell'intuizione geometrica dei bambini che è stata alla base, nell'Ottocento, di molte proposte di Friedrich Fröbel (1782 -1852) e di Édouard Séguin

(1812-1880), quest'ultimo ispiratore di molti materiali di Maria Montessori, ad esempio le aste[10].

Rappresentazioni 2D in aritmetica

I "math drawings", sviluppati da Karen Fuson[11] per sostenere la comprensione dei numeri e del calcolo nelle scuole primarie negli Stati Uniti, costituiscono un modello geometrico che affianca le cifre scritte con il sistema posizionale: i bambini, in particolare coloro che trovano maggiore difficoltà, se vedono scritto 123 non sono portati a pensare a 1 + 2 + 3 ma, grazie ad alcuni disegni, essi visualizzano: 100 (rappresentato da un quadrato) + 20 (rappresentato da due segmenti verticali) + 3 (rappresentato da 3 punti). Fuson ricorda che questo sistema di rappresentazione, essendo realizzato con il foglio, integra e complementa la manipolazione di oggetti fisici, spingendo verso la astrazione. I piccoli cerchi di Fuson per le unità ricordano le perle Montessori, come lei stessa ha ricordato; i segmenti per le decine evocano il regolo arancione oppure la stecca delle 10 perline, stilizzando la rappresentazione; infine il quadrato vuoto stilizza la tavoletta Montessori.

Questa rappresentazione – geometrica, ma ancora una volta anche additiva, come abbiamo ricordato all'inizio – è volta soprattutto a sostenere la discussione e la spiegazione ai bambini degli algoritmi in colonna, allo scopo di ottenere la comprensione della logica degli algoritmi prima di rendere il calcolo automatico e quindi più veloce. Essi sostengono quello che Fuson chiama "math talk". Una volta rappresentate, le quattro operazioni risultano infatti piuttosto facili da eseguire, anche se il lavoro di disegno, pur trattandosi di schizzi, appare lungo e faticoso: la cosa non stupisce più di tanto perché è come se si rinunciasse alla leggerezza del nostro sistema posizionale per tornare alla "pesantezza" del sistema additivo (come quello romano, egiziano o sumero) che benché risulti molto facile, immediato ed intuitivo per i piccoli numeri e i piccoli calcoli, è decisamente non conveniente in caso di numeri elevati e calcoli complessi. Lo scopo dei disegni è infatti agevolare la comprensione aiutando, ancora una volta, a materializzare le potenze del 10 (anche se comunque si è distanti da ogni contatto con la "realtà", poiché non si tratta di esempi tratti da situazioni specifiche di conteggio o di misura).

---

10 In questa sede non descriviamo le basi geometriche di questo e altri materiali ripresi da Séguin, il quale li introduce per l'educazione motoria e dei sensi; questi aspetti sono stati analizzati nella tesi di dottorato di Elena Gil Clemente diretta dalla prima firmataria di questo articolo (si veda bibliografia).

11 Sono disegni proposti nel sussidiario, ma evocano il consiglio di Polya: "Fai un disegno" per pensare in matematica.

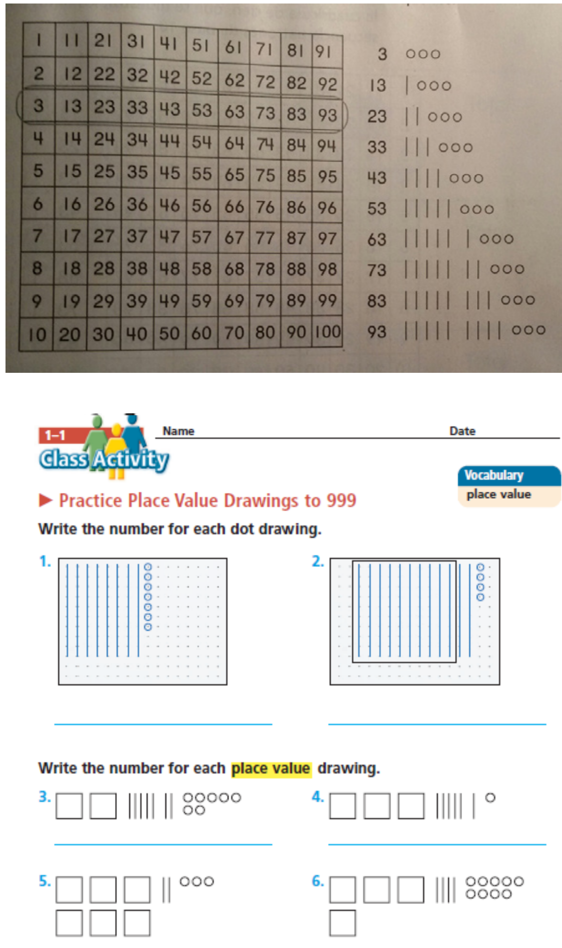


Fig. 9 I disegni matematici per rappresentare i numeri di Karen Fuson: a) a sinistra Math Expressions Grade 1 (ed. 2006, Student Activity Book, vol. 1, p. 155); b) a destra, disegni per il valore posizionale (place value drawing) nei sussidiari Math Expressions (unità, decine, centinaia).

In Italia, Camillo Bortolato sembra quasi proporre un metodo infallibile e unico nel suo genere quando chiede ai bambini davanti alla LIM (dove si vede l'immagine di 100 pallini ordinati in schieramenti da 10) di rappresentare ad esempio il numero 67 "senza contare". Magia! Come faranno questi bambini? Nel video esplicativo del metodo analogico, i bambini tracciano rapidamente (strisciando il dito sulla LIM o tirando gli sportellini di una scacchiera) 6 righe e poi toccano le 7 unità, anche grazie allo spazio posto tra le prime 5 unità e le 5 seconde: i bambini fanno leva sulla loro intuizione geometrica ingenua che li guida in modo naturale.

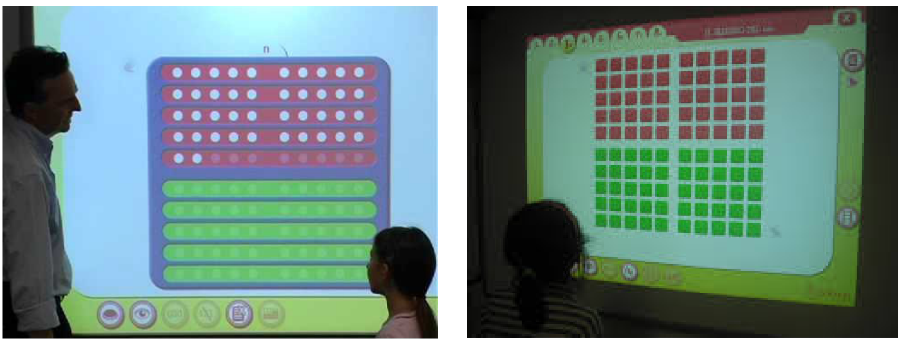
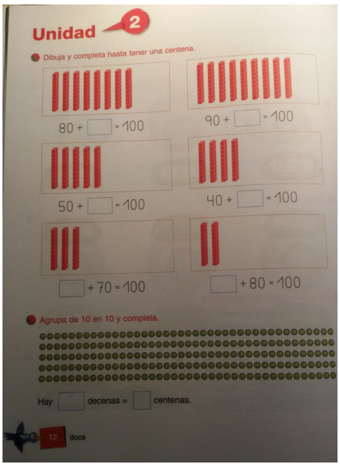
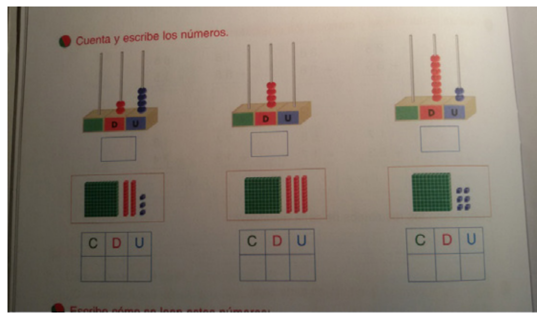


Fig. 10 Una rappresentazione geometrica dei numeri naturali a scopo didattico con i bambini. Due immagini dal video LIM, Linea del 100 e strategie, Edizioni Erickson, 2010, in cui si vede una bambina alle prese con sottrazioni successive (-7) partendo da 70 (https://www.youtube.com/watch?v=VKOy2v72dTg).

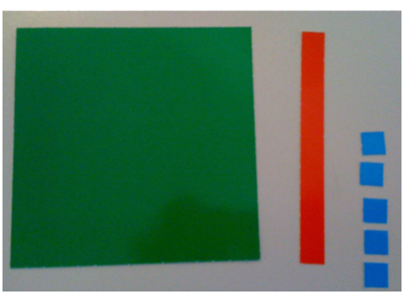
Nei sussidiari curati per la casa editrice Anaya, l'équipe di Luis Ferrero propone la rappresentazione dei numeri attraverso diversi sistemi, come si può vedere anche nei libri cinesi. Uno di questi è di stampo geometrico (fig. 11 a), associato all'uso dei colori, come già avevano proposto Montessori e Cuisenaire: a) un cubo blu per le unità (per la Montessori sono verdi), b) dieci cubi che formano un "regolo", un parallelepipedo rosso per le decine (per la Montessori sono blu) e c) dieci regoli che formano una "tavoletta", un parallelepipedo verde per le centinaia (per la Montessori sono rosse). I sussidiari sono accompagnati da un buon numero di quadrati blu, rettangoli rossi (10 volte il quadrato blu) e quadrati verdi (cento volte il quadrato blu) che costituiscono una rappresentazione in 2D, con i vantaggi segnalati da Fuson; e con gli stessi colori poi si propone l'abaco che è lo strumento "concreto" che permette di passare dalla rappresentazione geometrica additiva (il "totale"), alla rappresentazione posizionale con un passaggio verso l'astrazione e verso la comprensione dell'interpretazione delle cifre.



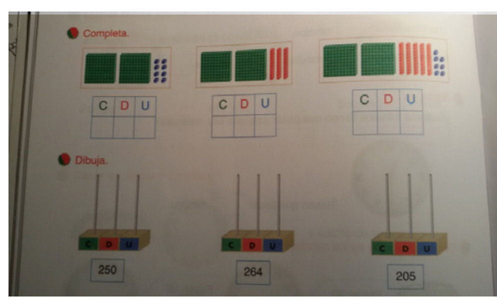
a)



b)



c)



d)

Fig. 11 Luis Ferrero, Matemáticas 2 - Cuaderno 1, Madrid, Anaya, 2007, Materiale fisico 3D disegnato sul sussidiario p. 12 a) p. 16 b) p. 20 d). Si noti il confronto fra rappresentazione additiva (blocchi) e posizionale (abaco) e scrittura dei numeri con le cifre attraverso vari esercizi (in c: conta e scrivi i numeri; in d: disegna, completa); c) Materiale 2D ritagliabile (si stacca con le dita, come le pedine in alcuni giochi da tavolo)

Nell'uso dei materiali, vediamo quindi un'alternativa: la proposta di certi materiali o immagini come la via giusta; oppure la presentazione di più materiali e immagini e i rapporti fra di essi come modo per introdurre un concetto astratto, che è indipendente delle rappresentazioni e non è "catturato" fino in fondo da nessuna di esse. La prima via può essere all'origine di situazioni come quelle descritte da Hughes cui abbiamo fatto riferimento all'inizio dell'articolo: i bambini non stabiliscono relazioni fra idee e rappresentazioni e di fronte a una operazione in colonna il materiale didattico posto a loro fianco sul banco è muto, non è d'aiuto. Mancano le relazioni fra le cose (Cuisenaire), i nessi concettuali (Lafforgue), la conversazione matematica (Fuson) cui sono funzionali i materiali, che non costituiscono di per sé una via unica facilitata al concetto di numero.

3. *Recuperare la geometria nella scuola primaria e usare i materiali in modo elastico e consapevole*

Attraverso alcuni esempi abbiamo costatato la "geometria nascosta" che si trova nelle aule di matematica della scuola primaria. Tutti gli esempi hanno riguardato i sussidi didattici per lo studio dei numeri naturali e in particolare del sistema di numerazione posizionale decimale oggi di uso corrente. Altri si potrebbero aggiungere, come ad esempio l'uso quasi scontato delle "torte" per introdurre il concetto di frazione, che ricorre all'intuizione ingenua del cerchio e della suddivisione del cerchio grazie a diametri o raggi; e l'uso della "linea dei numeri" per illustrare il concetto di successivo (attraverso l'intuizione ingenua degli assiomi d'ordine) oppure la sottrazione o l'addizione (attraverso l'addizione e sottrazione di segmenti, evocati "corporeamente" da passi o salti). Parliamo di geometria nascosta perché in tutti questi casi non vi è un collegamento esplicito a concetti geometrici. Molti insegnanti non sono consapevoli dello spessore geometrico (rapporti fra grandezze, oppure assiomi d'ordine) di cui si giovano in questo genere di spiegazioni "intuitive", e non a caso si parla di "manipolazione" oppure di "visualizzazione" (parole che riflettono in parte l'esperienza corporea, ma nascondono l'intuizione del continuo che è qualcosa di più profondo e globale). Si fa leva sull'intuizione geometrica ingenua, nel senso che non si tratta di concetti geometrici che sono stati oggetto di attenzione in aula, previamente o nello stesso tempo. Infatti, nonostante il "revival" della geometria elementare propugnato da più parti negli ultimi vent'anni (Guzmán 2007), lo spazio dedicato alla geometria nella scuola primaria è scarso e spesso essa è ridotta all'introduzione di pochi concetti (punto, segmento, angolo, perpendicolare, parallele, e tra i più piccoli la discriminazione fra triangolo, quadrato, rettangolo e cerchio) e di alcune formule di calcolo di aree e perimetri. La storia ci aiuta a capire le ragioni di questa situazione: mentre nel corso dell'Ottocento lo sforzo verso il superamento di una visione dell'insegnamento della matematica nella scuola primaria come pura alfabetizzazione numerica avesse puntato proprio sullo sviluppo di una geometria intuitiva per i fanciulli, con successi notevoli dal punto di vista delle proposte didattiche, le critiche alla geometria euclidea come "anticaglia" hanno fatto disperdere questo patrimonio culturale che non si è mai diffuso veramente nelle scuole a livello internazionale.

Non è possibile in questa sede analizzare questi sviluppi. Gli esempi che abbiamo proposto confermano la potenza della mente geometrica dei bambini e quindi inducono a dedicare sempre più tempo alla geometria, in sincronia con l'aritmetica e lavorando sulla rete di nessi concettuali fra numeri e forme[12]. Inoltre, ci preme sottolineare l'esigenza di una chiara analisi degli strumenti didattici usati nella comunicazione della matematica ai fanciulli, che si allontani da vedute quasi terapeutiche di certi metodi o materiali. Quando la "terapia" consiste nel sollecitare le energie insite nell'essere umano considerato globalmente nella tensione mente-corpo, e nel mobilitare la rete dei concetti in matematica, una tale connessione fra *paideia* e medicina non sarebbe affatto fuorviante (come insegna Jaeger). Un altro discorso sono le terapie che consistono di "formule" o "preparati" che per oscure ragioni portano all'agognato successo con numeri e calcoli. Ai primi del Novecento il matematico Charles Laisant registrava lucidamente l'inquietudine per l'apprendimento della matematica che assale i genitori quando i bambini iniziano la scuola, e a queste paure corrisponde (ieri come oggi) un'offerta anche commerciale di soluzioni pronte all'uso, un continuo susseguirsi di proposte (il "metodo" Cuisenaire a suo tempo, oggi la matematica vedica in India, i sussidiari di Singapore adottati negli Stati Uniti, gli abbonamenti a siti per esercitarsi con palmari e cellulari, e così via, e naturalmente anche il "metodo" Montessori). Ben vengano proposte e innovazioni in paesi dove godiamo della libera concorrenza economica e delle idee, ma senza perdere la bussola del valore umanistico della matematica, ossia quell'essere radicata nel modo di stare nel mondo degli esseri umani che ha ricordato così efficacemente in tempi di crisi René Thom e che già molti e molti secoli fa ha indotto Platone a proporre la matematica per l'educazione dei fanciulli.

---

[12] Si rinvia agli esempi (punto, retta, cerchio e circonferenza) proposti in http://online.universita.zanichelli.it/israel/esempi-da-proporre-agli-alunni-della-scuola-primaria/. Si veda anche il video: *Matematica: insegnare a partire dall'esperienza. Il cerchio* (Orizzonte scuola, 2013) https://www.youtube.com/watch?v=cd9XipEuhBw.

Bibliografia

Studi

BABINI, Valeria Paola, LAMA Luisa 2003 *Una donna nuova. Il femminismo scientifico di Maria Montessori*, Milano, Franco Angeli, 2a ed.

DE GIORGI Fulvio 2012 "Maria Montessori", *Dizionario Biografico degli Italiani,* vol. 76, ad vocem.

GIL CLEMENTE, Elena "Desde la historia: geometría y aritmética en las bases de la educación especial según Séguin" en *Didáctica de las matemática para niños con síndrome de Down a partir de una visión integrada de la aritmética y de la geometría*, unpublished PhD thesis, Saragozza, Universidad de Zaragoza, pp. 18-75.

DE GUZMÁN Miguel 2007 "Enseñanza de las ciencias y la matemática", *Revista Iberoamericana de Educación*, vol. 43, pp. 19-58.

HUGHES Martin (1986). *Children and Numbers, Difficulties in Learning Mathematics*. Basil Blackwell, Oxford y New York.

ISRAEL Giorgio 2011, *La natura degli oggetti matematici*, Milano, Marietti.

ISRAEL Giorgio, MILLÁN GASCA Ana 2012 *Pensare in matematica*, Bologna, Zanichelli.

JAEGER Werner 2003 *Paideia. La formazione dell'uomo greco*, Milano, Bompiani (ed. originale del 1944).

LAFFORGUE Laurent 2007 *Le calcul à l'école primaire*, http://www.ihes.fr/~lafforgue/education.html.

2010 "L'importance du calcul et de la geometrie à l'école primaire", *Jouneée "Transmaitre": instruir aujourd´hui à lécole primarie.*

MILLÁN GASCA A. 2013, "Riflessi della crisi dell'istruzione nei libri di testo", in Matteo D'Amico, Irene Enriques, A. Millán Gasca e Giulio Ferroni, *Testi e teste: cos'è in gioco oggi quando parliamo di "libri di testo"*, Padova, Gilda degli Insegnanti, pp. 43-64. Versione on line "I sussidiari di matematica, dalla storia alla scuola di oggi",
http://online.universita.zanichelli.it/israel/files/2013/09/Zanichelli_Matdid6.pdfThom

POLYA George 1971 *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, Milano, Feltrinelli

THOM René *Modern' Mathematics: An Educational and Philosophic Error?* in American Scientist, vol.59

1974 *Mathématiques modernes et mathématique de toujousr,* Jaulin, 1974, pp. 49-56.

1991 *Prédire est pas expliquer*, Flammarion, Paris, 1991.

Fonti

BORTOLATO Camillo 2008 *La linea del 100. Metodo analogico per l'apprendimento della matematica*, Trento, Erickson.

CUISENAIRE George 1961 *Les nombres en couleurs. Nouveau procédé de calcul par la méthode active applicable à tous les degrés de l'école primaire*, Tamines, Duculot-Roulin.

1966 *Les nombres en couleurs. Initiation à la méthode*, 5a ed. rivista e completata, Bruxelles, Éditions Calozet.

L'as des réglettes (1962) http://www.rts.ch/archives/tv/information/3459877-l-as-des-reglettes.html

Cuisenaire.eu. Le site des réglettes Cuisenaire (a cura di Yves Cuisenaire) http://www.cuisenaire.eu/

FERRERO Luis, JIMÉNEZ María del Carmen, MARTÍN María Gregoria 2007 *Matemáticas Salta a la vista* 2, Primaria Primer Ciclo, Madrid, Anaya.

FUSON Karen 2006 *Math Expressions (Grade K-Grade 5)*, Boston, Houghton Mifflin (ed. Common Core, 2013)

2012 *Il numero e il contare nel mondo infantile*, Conferenza tenuta presso l'Università Roma Tre, 16 ottobre 2012, http://www.mat.uniroma3.it/users/primaria/Fuson%20SFP.pdf (consultato il 22.11.15).

FUSON, Karen C., CLEMENTS, Douglas H., BECKMANN, Sybilla 2010 *Focus in kindergarten: teaching with curriculum focal points*, Reston, A. National Council of Teachers of Mathematics/National Association for the Education of Young Children.

FRÖBEL Friedrich 1871 *Manuale pratico dei giardini d'infanzia ad uso delle educatrici e delle madri di famiglia, composto sopra i documenti tedeschi da F.-J. Jacobs*, tradotto dal francese da M.M.T, Milano, Civelli.

MONTESSORI Maria 1912 *The Montessori method. Scientific pedagogy as applied to child education in "The children's houses" with addistions and revisions by the author*, New York, Frederick A. Stokes company, 2nd ed. (trad di Anne. E, George, introduzione di Henry W. Holmes)

1934a *Psicoaritmética*, Casa editorial Araluce, Barcelona

1934b *Psicogeometría*, Casa editorial Araluce, Barcelona.

SÉGUIN Édouard 1846 *Traitement moral des idiots et des autres enfants arrieérés*, Paris, J. B. Baillière.

1866 *Idiocy: and its treatment by the physiological method*, New York, Augustus M. Kelley (ed. 1971, with a bibliographical note by Harold Ruvin & Francesco Cordasco. New York, A.M. Kelley).